具有有理特征值的对称矩阵的一种构造方法

张圣贵

在《高等代数》教学过程中，常常要构造一些特征值为有理数的 3 阶有理对称矩阵，作为作业或考题. 手工构造既枯燥又花时间. 本文用符号计算方法和代数计算软件 CoCoA, 给出批量满足要求的有理对称矩阵的程序.

程序 1

```
MB:=Mat[[1/2x, -1/6xy, 1/3y],[0, 1/3xy, 1/3y],[-1/2x, -1/6xy, 1/3y]];
MB1:=Transposed(MB);
For K:=0 To 9 Do
    M1:=MB*Mat[[1, 0,0],[0, 1,0],[0, 0, K]]*MB1;
    For M:=1 To 3 Do
        For N:=1 To 3 Do
            If M1[M][N]=0 Then M1[M][N]:=M1[M][N]
                Elsif Deg(M1[M][N])>1 Then M1[M][N]:=NR(M1[M][N],[x^2-2,y^2-3])
            EndIf;
        EndFor;
    EndFor;
    B2:=M1;
    B2;
EndFor;
```

在 CoCoA 4.6 上运行程序 1, 可得到下列有理对称矩阵，它们的特征值依次分别为

$(1,1,0)$, $(1,1,1)$, $(1,1,2)$, $(1,1,3)$, $(1,1,4)$, $(1,1,5)$, $(1,1,6)$, $(1,1,7)$, $(1,1,8)$, $(1,1,9)$.

$$\begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 4/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 4/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 4/3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 5/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 5/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 5/3 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 7/3 & 4/3 & 4/3 \\ 4/3 & 7/3 & 4/3 \\ 4/3 & 4/3 & 7/3 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 8/3 & 5/3 & 5/3 \\ 5/3 & 8/3 & 5/3 \\ 5/3 & 5/3 & 8/3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 10/3 & 7/3 & 7/3 \\ 7/3 & 10/3 & 7/3 \\ 7/3 & 7/3 & 10/3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 11/3 & 8/3 & 8/3 \\ 8/3 & 11/3 & 8/3 \\ 8/3 & 8/3 & 11/3 \end{pmatrix}$$

程序 2

```
MB:=Mat[[1/2x, 1/6xy, -1/3y],[0, 1/3xy, 1/3y],[1/2x, -1/6xy, 1/3y]];
MB1:=Transposed(MB);
For K:=0 To 9 Do
    M1:=MB*Mat[[1, 0,0],[0, 1,0],[0, 0, K]]*MB1;
    For M:=1 To 3 Do
        For N:=1 To 3 Do
            If M1[M][N]=0 Then M1[M][N]:=M1[M][N]
                Elsif Deg(M1[M][N])>1 Then M1[M][N]:=NR(M1[M][N],[x^2-2,y^2-3])
            EndIf;
        EndFor;
    EndFor;
    B2:=M1;
    B2;
EndFor;
```

在 CoCoA 4.6 上运行程序 2, 可得到下列另一组有理对称矩阵，它们的特征值依

次分别为

$(1,1,0),\ (1,1,1),\ (1,1,2),\ (1,1,3),\ (1,1,4),\ (1,1,5),\ (1,1,6),\ (1,1,7),\ (1,1,8),\ (1,1,9).$

$$\begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 4/3 & 1/3 \\ -1/3 & 1/3 & 4/3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 5/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 5/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 5/3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 7/3 & -4/3 & -4/3 \\ -4/3 & 7/3 & 4/3 \\ -4/3 & 4/3 & 7/3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 8/3 & -5/3 & -5/3 \\ -5/3 & 8/3 & 5/3 \\ -5/3 & 5/3 & 8/3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10/3 & -7/3 & -7/3 \\ -7/3 & 10/3 & 7/3 \\ -7/3 & 7/3 & 10/3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 11/3 & -8/3 & -8/3 \\ -8/3 & 11/3 & 8/3 \\ -8/3 & 8/3 & 11/3 \end{pmatrix}$$

修改程序 1 和程序 2 中的矩阵 $\mathrm{Mat}[[1,0,0],[0,1,0],[0,0,K]]$ 的对角线上的数，就可以产生不同的有理对称矩阵.